

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

TÀI LIỆU BÀI GIẢNG

Giáo viên: LÊ ANH TUẤN

Đây là tài liệu tóm lược các kiến thức đi kèm với bài giảng Bài 1. Phương trình lượng giác cơ bản thuộc khóa học LTDH KIT-3: Môn Toán (Thầy Lê Anh Tuấn) tại website Hocmai.vn. Để có thể nắm vững kiến thức phần Bài 1. Phương trình lượng giác cơ bản, Bạn cần kết hợp xem tài liệu cùng với bài giảng này.

1. BẢNG GIÁ TRỊ CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC ĐẶC BIỆT:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
HS LG	0°	30°	45°	60°	90°	180°	120°	270°	360°
$Sinx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$Cosx$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$Tanx$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	//	0	$-\sqrt{3}$	//	0
$Cotx$	//	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	//	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	//

2. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC:

2.1. Các hệ thức lượng giác cơ bản:

Nhớ: “Cùng góc”

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}; -1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$$

$$\text{Suy ra: } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}; \tan x \cdot \cot x = 1.$$

2.2. Công thức liên quan đặc biệt:

Nhớ: “Cos đối – Sin bù - Phụ chéo”

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

Đặc biệt:

$$\sin(\alpha \pm k\pi) = \begin{cases} \sin \alpha & \text{khi } k \text{ chẵn} \\ -\sin \alpha & \text{khi } k \text{ lẻ} \end{cases}; \tan(\alpha \pm k\pi) = \tan \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm k\pi) = \begin{cases} \cos \alpha & \text{khi } k \text{ chẵn} \\ -\cos \alpha & \text{khi } k \text{ lẻ} \end{cases}; \cot(\alpha \pm k\pi) = \cot \alpha$$

2.3. Công thức cộng:

Nhớ: “Sin thì sin cos, cos sin

Cos thì cos cos, sin sin dấu đối”

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

2.4. Công thức nhân đôi:

Nhớ: “Suy ra từ công thức cộng bằng cách thay b bằng a”

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cdot \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 a$$

2.5. Công thức hạ bậc:

Nhớ: “Được suy ra từ công thức nhân đôi”.

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

2.6. Công thức biến đổi tổng thành tích:

Nhớ: “Sin cộng sin bằng hai lần sin cos. Sin trừ sin bằng hai lần cos sin

Cos cộng cos bằng hai lần cos cos. Cos trừ cos bằng hai lần - sin sin”

$$\sin a + \sin b = 2 \cdot \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}, \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}, \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}, \cos a - \cos b = -2 \cdot \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

2.7. Công thức biến đổi tích thành tổng:

Nhớ: “Suy ra từ công thức tổng thành tích”

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

2.8. Công thức tính theo t = tan a: $\sin 2a = \frac{2t}{1+t^2}, \cos 2a = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan 2a = \frac{2t}{1-t^2}$

“Công thức này đa số học sinh không nhớ được nhưng hay dùng trong việc giải PTLG nên cần lưu ý”

2.9. Công thức nhân ba:

$$\sin 3a = \sin(2a + a) = 3 \cdot \sin a - 4 \cdot \sin^3 a, \quad \cos 3a = \cos(2a + a) = 4 \cdot \cos^3 a - 3 \cdot \cos a$$

$$\tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}$$

3. MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI THƯỜNG DÙNG:

“Để đưa về Phương trình tích hay để rút gọn”

1) $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$; $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$

2) $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$

3) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x) \cdot (\cos x + \sin x)$

4) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 - \sin x) \cdot (1 + \sin x)$ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)$

5) $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cdot \cos x)$, $\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cdot \cos x)$

6) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \cos 4x$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \cos 4x$$

7) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin \frac{3\pi}{2} \cdot \cos x + \cos \frac{3\pi}{2} \cdot \sin x = -\cos x$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = \cos \frac{7\pi}{2} \cdot \cos x - \sin \frac{7\pi}{2} \cdot \sin x = \sin x$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sin x + \cos x)$$

4. CÁC PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

a) Giải phương trình $\sin x = m$, $m \in [-1; 1]$

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

b) Giải phương trình $\cos x = m$, $m \in [-1; 1]$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

c) Giải phương trình $\tan x = m$, $m \in \mathbb{R}$

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) Giải phương trình $\cot x = m$, $m \in \mathbb{R}$

$$\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

II. Các phương trình lượng giác cơ bản**1) Phương trình bậc nhất**Dạng $a \sin x + b \cos x = c$ Ví dụ. Giải phương trình: $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$ **2) Phương trình đẳng cấp**Dạng: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ Xét $\cos x = 0$ thay vào phương trìnhXét $\cos x \neq 0$ chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ ta được phương trình: $a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$ Dạng bậc 2-0: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x + d = 0$ $\Leftrightarrow a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x + d(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$ Dạng: $a \sin^3 x + b \sin^2 x \cos x + c \sin x \cos^2 x + d \cos^3 x = 0$ Xét $\cos x = 0$ thay vào phương trìnhXét $\cos x \neq 0$ chia cả hai vế cho $\cos^3 x$ ta được phương trình: $a \tan^3 x + b \tan^2 x + c \tan x + d = 0$ Ví dụ. Giải phương trình: $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$ **3) Phương trình đối xứng**

Dạng:

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$$

$$a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$$

Bước 1. Đặt

$$\begin{cases} t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1) \\ t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2}(1 - t^2) \end{cases}$$

Biến đổi đưa về phương trình bậc 2 ẩn t.

Bước 2. Giải phương trình bậc 2 ẩn t. Từ đó suy ra nghiệm x.Ví dụ. Giải phương trình: $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin x + \cos x) - 1$

Giáo viên: Lê Anh Tuấn

Nguồn :  Hocmai.vn